

COMPARACION ENTRE MOVIMIENTOS ADIABATICOS ESTACIONARIOS REVERSIBLES E IRREVERSIBLES DE GASES EN CONDUCTOS DE SECCION VARIABLE

Por GREGORIO MILLAN,
Ingeniero Aeronáutico en el I.N.T.A

1. Introducción.

DOS son las causas principales de irreversibilidad en el movimiento adiabático de gases en conductos: el rozamiento con las paredes y la formación de ondas de choque. Una y otra se traducen en el aumento de la entropía del gas, puesto que el fenómeno es adiabático. El rozamiento produce un aumento continuo de la entropía en el sentido del movimiento. Las ondas de choque producen saltos localizados al atravesar la superficie de discontinuidad. El aumento de entropía modifica el estado del gas y, por tanto, las características del movimiento, con respecto a las que se obtendrían si éste fuera isentrópico, a igualdad de condiciones iniciales. El cálculo de la desviación de los valores de las magnitudes del movimiento real (irreversible) con respecto a los del movimiento ideal (reversible) es difícil, incluso si se supone, como se hace habitualmente, que el estado del movimiento es uniforme en cada sección transversal del conducto (movimiento unidimensional), y que el gas es un gas perfecto, con calores específicos constantes. La dificultad procede de que la magnitud de la irreversibilidad, y por tanto los valores de las magnitudes características del movimiento en cada sección dependen de la historia del movimiento del gas hasta llegar a ella, a diferencia de lo que ocurre en movimientos reversibles, en los que, dentro de la aproximación unidimensional señalada, el estado de movimiento en una sección depende, exclusivamente, de su área y de las condiciones iniciales. Por el contrario, el *sentido* de la desviación de cada magnitud característica del movimiento irreversible, con respecto a su valor en el movimiento reversible, a igualdad de condiciones iniciales, depende tan sólo de la sección considerada y puede determinarse fácilmente al aplicar los principios de conservación de la masa y de la energía, y la condición de irreversibilidad, es decir, de aumento de la entropía. Tal comparación cualitativa puede ser interesante y explicar

algunos de los fenómenos que se observan en la práctica, ayudando a comprender los principales efectos de la viscosidad y de la formación de ondas de choque en el movimiento.

En lo que sigue se desarrollan estas ideas y se analizan algunos casos que se consideran de interés práctico.

2. Notación.

σ = área de la sección del conducto.
 p = presión.
 ρ = densidad.
 T = temperatura absoluta.
 H = entalpía específica.
 S = entropía específica.
 C_p = calor específico a presión constante.
 C_v = calor específico a volumen constante.
 $\gamma = C_p/C_v$ = relación de calores específicos.
 $R = C_p - C_v$.
 v = velocidad del gas.
 a = velocidad del sonido.
 M = número de MACH.
 G = gasto másico.
 I = impulso específico.

El subíndice cero se refiere a las condiciones en el punto de remanso.

El subíndice i se refiere a las condiciones iniciales.

El asterisco se refiere al movimiento reversible.

3. Hipótesis.

Se supone:

1.º Que la forma del conducto está determinada por la ley de variación del área σ de la sección transversal del mismo a lo largo del eje, la cual varía lentamente y de modo continuo.

2.º Que el movimiento es adiabático y no existen órganos móviles en el conducto (movimiento isoenergético).

3.º Que el estado de movimiento es uniforme

en cada sección transversal del conducto (movimiento unidimensional).

4.º Que el gas es un gas perfecto y que sus calores específicos son constantes.

4. Ecuaciones del movimiento.

Las ecuaciones del movimiento se obtienen por aplicación de los principios de conservación de la masa y de la energía. El principio de conservación del impulso es sólo necesario cuando se quiere conocer la magnitud de la irreversibilidad.

a) *Principio de conservación de la masa.* — En virtud de las hipótesis del apartado precedente, y puesto que el movimiento es estacionario, se expresa en la forma:

$$\rho v \sigma = G. \quad [1]$$

b) *Principio de conservación de la energía.* — Puesto que las fuerzas de rozamiento no realizan trabajo al no existir órganos móviles y no hay conducción de calor, la ecuación de la energía se reduce a la siguiente:

$$\frac{1}{2} v^2 + H = H_0, \quad [2]$$

en donde la entalpía específica H se expresa en una cualquiera de las formas:

$$H = C_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{a^2}{\gamma - 1}, \quad [3, a]$$

siendo:

$$a = \sqrt{\gamma R T} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \quad [3, b]$$

la velocidad de propagación del sonido en el gas, a la temperatura T .

5. Influencia del número de Mach.

Interesa poner de manifiesto la influencia del número de MACH en las fórmulas anteriores.

Puesto que es:

$$v = M a = M \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = M \sqrt{\gamma R T}, \quad [4]$$

se obtiene:

a) *Ecuación de continuidad:*

$$M \sigma \sqrt{\frac{p}{\rho}} = \frac{G}{\gamma}. \quad [5]$$

b) *Ecuación de la energía (de FANNO):*

$$\sigma M p \sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} = \frac{\sqrt{\gamma - 1}}{\gamma} G \sqrt{H_0}. \quad [6]$$

Las ecuaciones [1] y [2], o sus equivalentes [5] y [6], son válidas tanto para movimientos irreversibles como para movimientos reversibles.

6. Ecuación de estado y entropía.

En virtud de la hipótesis 4.ª, la ecuación de estado del gas es:

$$\frac{p}{\rho} = R T. \quad [7]$$

La entropía específica del gas se expresa en la forma:

$$S = S_i + C_v \log_e \left[\frac{p}{\rho^\gamma} ; \frac{p_i}{\rho_i^\gamma} \right]. \quad [8]$$

7. Condición de irreversibilidad.

En movimientos reversibles, por ser adiabáticos, debe ser:

$$S^* = S_i = \text{const.}, \quad [9]$$

es decir, en virtud de [8]:

$$\frac{p^*}{\rho^{*\gamma}} = \frac{p_i}{\rho_i^\gamma} = \text{const.}, \quad [10]$$

y la presión es sólo función de la densidad.

En movimientos irreversibles, la condición de irreversibilidad se expresa en la forma:

$$S > S_i = S^*, \quad [11]$$

siendo S^* la entropía del movimiento reversible que sirve de modelo; es decir, debe cumplirse la condición:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} > \frac{p_i}{\rho_i^\gamma} = \frac{p^*}{\rho^{*\gamma}}, \quad [12]$$

y además, la función $\frac{p}{\rho^\gamma}$ es monótona creciente en el sentido del movimiento.

8. Fundamento del método.

Se comparan los valores de las siguientes magnitudes:

1. Gasto, G .
2. Entalpía específica del punto de remanso, H_0 .
3. Área de la sección del conducto, σ .
4. Número de MACH, M .
5. Presión, p .
6. Densidad, ρ .
7. Temperatura absoluta, T .
8. Velocidad del sonido, a .
9. Velocidad del gas, v .
10. Impulso específico I , definido por la expresión:

$$I = p + \rho v^2 = p(1 + \gamma M^2). \quad [13]$$

Entre ellas existen las siguientes relaciones:

1. Ecuación de continuidad [5].
2. Ecuación de la energía [6].
3. Ecuación de estado [7].
4. Ecuación de definición de la velocidad del sonido [3 b].
5. Ecuación de definición del número de MACH [4].
6. Ecuación de definición del impulso específico [13].

Puesto que existen diez variables y seis relaciones entre ellas, restan cuatro variables independientes. Por tanto, para comparar un movimiento irreversible con otro reversible, habrá que igualar en ambos los valores de tres de dichas cuatro variables independientes; entonces, la condición de irreversibilidad [12] dará una inecuación entre los valores de la cuarta variable independiente en ambos movimientos, que permitirá deducir el sentido de la desviación de dicha variable. Al combinar esta inecuación de irreversibilidad con las seis ecuaciones de relación antes citadas, se obtendrán otras tantas inecuaciones, las cuales darán, a su vez, los sentidos de las desviaciones de cada una de las restantes variables.

Al elegir las tres variables independientes cuyos valores deben igualarse en los dos movimientos comparados en cada caso, las variables elegidas deben ser compatibles con la condición de irreversibilidad. Esto quiere decir que nunca pueden elegirse dos variables de estado, o, lo que es lo mismo, una y la velocidad del sonido; porque si dos variables de estado son iguales, lo serán todas, lo que, evidentemente, es contrario a la condición de irreversibilidad [12], que expresa que los estados del

gas son diferentes en los dos movimientos comparados.

Elegidas las tres variables a igualar en un caso particular, la interpretación del criterio adoptado para la comparación es sencilla. Un ejemplo, que desarrollamos en el número siguiente, mostrará la forma de aplicar el método y de interpretar los resultados.

9. Igualdad de gasto, de entalpía específica del punto de remanso y del número de Mach.

Estas condiciones se expresan en la forma:

$$G = F^*; \quad [14, a]$$

$$H_0 = H_0^*; \quad [14, b]$$

$$M = M^*. \quad [14, c]$$

De aquí y de [5] y [6] se deduce:

$$\sigma \sqrt{p \rho} = \sigma^* \sqrt{p^* \rho^*}, \quad [15]$$

$$p \sigma = p^* \sigma^*. \quad [16]$$

De donde resulta:

$$\frac{p}{p^*} = \frac{\sigma^*}{\sigma}, \quad [17]$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{\sigma^*}{\sigma}. \quad [18]$$

De éstas y de la ecuación de estado se obtiene:

$$T = T^*, \quad [19]$$

que podría haberse deducido también directamente de la ecuación de la energía [2].

De [19] y [3 b] se deduce:

$$a = a^*, \quad [20]$$

y de ésta y [14 c], en virtud de [4]:

$$v = v^*. \quad [21]$$

De [13], en virtud de [14 c] y [17], se deduce:

$$\frac{I}{I^*} = \frac{\sigma^*}{\sigma}. \quad [22]$$

La condición de irreversibilidad [12], en virtud de [17] y [18], se traduce en la siguiente:

$$\sigma > \sigma^*. \quad [23]$$

Al llevar [23] a [17], [18] y [22], teniendo además presentes [19], [20] y [21], se concluye que, en este caso, existen las siguientes relaciones entre los valores de las magnitudes homólogas en ambos movimientos:

$$\left. \begin{aligned} G &= G^* \\ H_0 &= H_0^* \\ M &= M^* \\ \sigma &> \sigma^* \\ p &< p^* \\ \rho &< \rho^* \\ T &= T^* \\ a &= a^* \\ v &= v^* \\ I &< I^* \end{aligned} \right\} [24]$$

El caso elegido puede interpretarse de uno de los dos modos siguientes:

1.º Se comparan los movimientos reversible e irreversible en dos conductos diferentes. Ambos conductos tienen igual área de la sección de entrada y las condiciones de los dos movimientos son iguales en ella. Se consideran como secciones homólogas las que corresponden a igual valor del número de MACH en ambos movimientos.

Se concluye en tal caso que el área de la sección del conducto del movimiento irreversible es siempre mayor que la del reversible; las temperaturas absolutas, las velocidades del sonido y las velocidades del gas en ambos movimientos son iguales en secciones homólogas. La presión, la densidad y el impulso específico del movimiento irreversible son siempre menores que sus homólogos en el reversible.

2.º Se comparan un movimiento reversible y uno irreversible en el mismo conducto, a igualdad de condiciones iniciales en la sección de entrada.

Se concluye que el mismo número de MACH se alcanza en secciones diferentes en ambos movimientos. La forma del conducto y el grupo de fórmulas [24] dan la posición relativa de las secciones homólogas y el sentido de la desviación de las magnitudes correspondientes.

Puesto que $\frac{p}{\rho^{\frac{1}{\gamma}}}$ es función monótona creciente en el sentido del movimiento, se concluye de [17] y [18]:

$$d \frac{\sigma}{\sigma^*} > 0; \quad [25]$$

es decir:

$$\frac{d \sigma}{\sigma} - \frac{d \sigma^*}{\sigma^*} > 0. \quad [26]$$

Por tanto, si es $d \sigma^* = 0$, resulta $d \sigma > 0$, y puesto que $M^* = 1$ corresponde a la garganta del conducto, es decir, a $d \sigma^* = 0$, resulta que en un movimiento irreversible la velocidad del sonido se alcanza siempre detrás de la garganta del conducto, o sea, en el tramo divergente, y tanto más lejos de ella cuanto mayor sea la irreversibilidad.

Además, mientras que el área σ_{cr}^* de la sección crítica del conducto reversible está determinada por las condiciones iniciales, el área correspondiente del conducto irreversible depende de éstas y de la cuantía de la irreversibilidad, siendo siempre mayor que aquélla, y tanto mayor cuanto mayor sea la irreversibilidad. Una consecuencia de carácter práctico, por ejemplo, es que, para lograr establecer un movimiento supersónico entre dos gargantas consecutivas, como se hace habitualmente en los túneles supersónicos, es preciso que la segunda garganta sea de mayor área que la primera, sin lo cual, el movimiento supersónico se establecería solamente, en todo caso, a partir de la segunda.

10. Comparación de algunos casos de interés práctico.

La tabla de la página siguiente incluye algunos casos que se consideran de interés. Los casos comparados son los siguientes:

1.º Igualdad de gasto, de entalpía específica del punto de remanso y de área de la sección del conducto.

2.º Igualdad de gasto, de entalpía específica del punto de remanso y de número de MACH.

3.º Igualdad de gasto, de entalpía específica del punto de remanso y de presión.

4.º Igualdad de gasto, de área de la sección del conducto y de presión.

5.º Igualdad de entalpía específica del punto de remanso, de área de la sección del conducto y de presión.

En cada uno de ellos se comparan, por columnas, las magnitudes homólogas en los movimientos irreversible y reversible, respectivamente.

En el primer caso es interesante observar que el signo de la desviación cambia para todas las variables excepto el impulso específico, cuando el movimiento pasa de subsónico a supersónico.

T A B L A

Caso Magnitud	1.º		2.º	3.º	4.º	5.º	Caso Magnitud
	Subsónico	Supersónico					
G	=		=	=	=		G*
H ₀	=		=	=	>	=	H ₀ *
σ	=		>	>	=	=	σ*
M	Subsónico	Supersónico	=	<	>	<	M*
	>	<					
p	<	>	<	=	=	=	p*
ρ	<	>	<	<	<	<	ρ*
T	<	>	=	>	>	>	T*
a	<	>	=	>	>	>	a*
v	<	>	=	<	>	<	v*
l	<	<	<	<	>	<	l*

